

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

**Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов единого
государственного экзамена 2012 года
по математике**

подготовлен Федеральным государственным научным учреждением
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

**Пояснения к демонстрационному варианту
контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2012 года
по МАТЕМАТИКЕ**

Демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2012 года разработан по заданию Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме, уровне сложности. Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2012 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов – в кодификаторах требований и элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2012 года.

Правильное решение каждого из заданий В1–В14 части 1 экзаменационной работы оценивается 1 баллом. Правильное решение каждого из заданий С1 и С2 оценивается 2 баллами, С3 и С4 – 3 баллами, С5 и С6 – 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы – 32.

Верное выполнение не менее пяти заданий экзаменационной работы отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования.

К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, даётся возможное решение. Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ**Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов 2012 года****Инструкция по выполнению работы**

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 4 часа (240 мин.). Работа состоит из двух частей и содержит 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценке работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

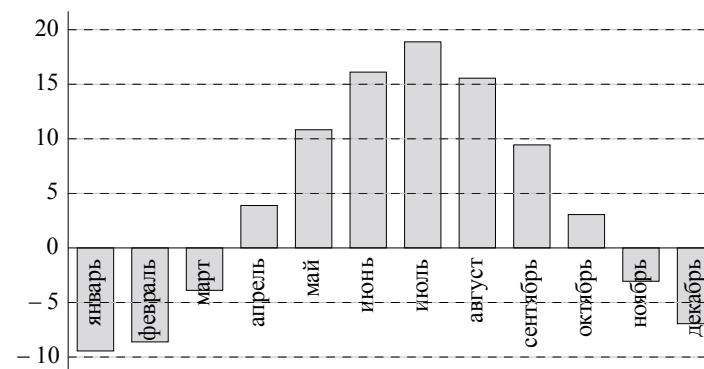
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1

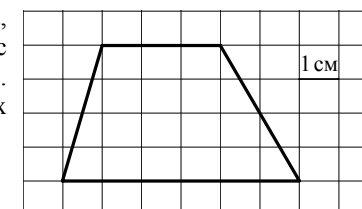
Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

B2

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Ярославле по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда средняя температура в Ярославле была отрицательной.

**B3**

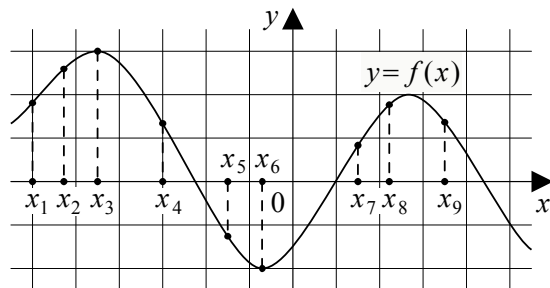
Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



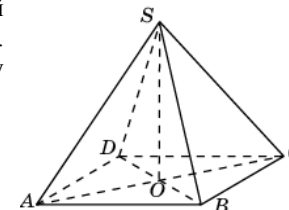
- B4** Строительная фирма планирует купить 70 м^3 пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия доставки
А	2 600	10 000	Нет
Б	2 800	8 000	При заказе товара на сумму свыше 150 000 рублей доставка бесплатная
В	2 700	8 000	При заказе товара на сумму свыше 200 000 рублей доставка бесплатная

- B5** Найдите корень уравнения $\log_3(x-3) = 2$.
- B6** Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Найдите угол BOC , если угол BAC равен 32° .
- B7** Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.
- B8** На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество найденных точек.



- B9** Диагональ AC основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 6. Высота пирамиды SO равна 4. Найдите длину бокового ребра SB .



- B10** В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.
- B11** Объём первого цилиндра равен 12 м^3 . У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания в два раза меньше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра (в м^3).
- B12** Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.
- B13** Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

- B14** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

C2

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и плоскостью основания призмы.

C3

Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

C4

На стороне BA угла ABC , равного 30° , взята такая точка D , что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и касающейся прямой BC .

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

C6

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

**Система оценивания демонстрационного варианта
контрольных измерительных материалов по МАТЕМАТИКЕ**

Ответы к заданиям части 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задание	Ответ
B1	5
B2	5
B3	18
B4	192 000
B5	12
B6	64
B7	−0,8
B8	3
B9	5
B10	0,92
B11	9
B12	2,4
B13	5
B14	1

Ответы к заданиям части 2

Задание	Ответ
C1	а) $\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$. б) $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$
C2	30°
C3	$(2; \log_2 11]$
C4	1 или 7
C5	$\left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}\right)$
C6	а) 44; б) отрицательных; в) 17

Решения и критерии оценивания заданий части 2

Количество баллов, выставяемых за выполнение заданий части 2 зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

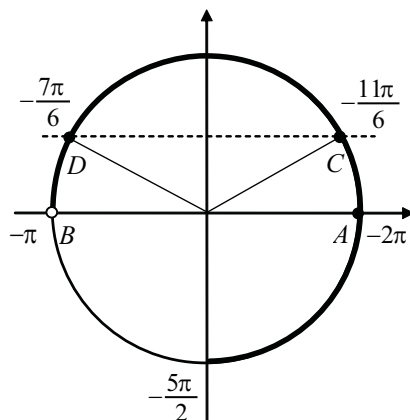
Решение.

а) Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, то $1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$,

$$2\sin^2 x - \sin x = 0, \quad \sin x \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Корни уравнения: $x = \pi n$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни уравнения $\sin x = 0$ изображаются точками A и B , а корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ — точками C и D , промежуток $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ изображается жирной дугой (см. рис.). В указанном промежутке содержатся три корня уравнения: -2π , $-2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$ и $-\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$.



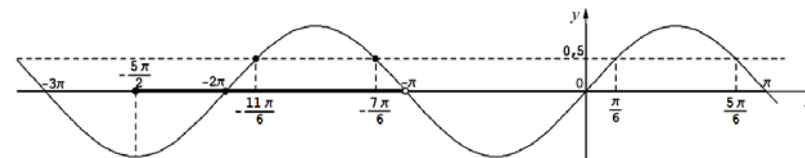
Ответ: а) πn , $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } -2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}.$$

Другие решения пункта б).

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, отберем по графику $y = \sin x$. Прямая $y = 0$ (ось Ox) пересекает график в единственной точке $(-2\pi; 0)$, абсцисса которой принадлежит промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает график ровно в двух точках, абсциссы которых принадлежат $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ (см. рис.). Так как период функции $y = \sin x$ равен 2π , то эти абсциссы равны, соответственно, $\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7\pi}{6}$.



В промежутке $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ содержатся три корня: -2π , $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

б) Пусть $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Подставляя $n = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, получаем $x = \dots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$. Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ принадлежит только $x = -2\pi$.

Пусть $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя $k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, получаем:

$$x = \dots \left(-\frac{1}{6} - 3\right)\pi, \left(\frac{1}{6} - 2\right)\pi, \left(-\frac{1}{6} - 1\right)\pi, \frac{\pi}{6}, \left(-\frac{1}{6} + 1\right)\pi, \left(\frac{1}{6} + 2\right)\pi, \dots$$

Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ принадлежат только $x = -\frac{11\pi}{6}$, $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ принадлежат корни: -2π , $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

б) Отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Пусть $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $-\frac{5\pi}{2} \leq \pi n < -\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq n < -1 \Leftrightarrow n = -2$.

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$: $x = -2\pi$.

Пусть $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n < -\pi \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < n \leq -\frac{7}{12} \Leftrightarrow n = -1$.

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$: $x = -\frac{11\pi}{6}$.

Пусть $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $-\frac{5\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < -\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq n < -\frac{11}{12} \Leftrightarrow n = -1$.

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$: $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ принадлежат корни: $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведен обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C2 Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Решение.

Обозначим H середину ребра BC (см. рисунок). Так как треугольник ABC равносторонний, а треугольник A_1BC – равнобедренный, отрезки AH и A_1H перпендикулярны BC . Следовательно, $\angle A_1HA$ – линейный угол двугранного угла с гранями $BSCA$ и BSA_1C .

Из треугольника A_1AB найдём: $AA_1 = 1$.

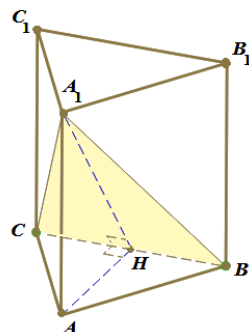
Из треугольника A_1HB найдём: $AH = \sqrt{3}$.

Из треугольника HAA_1 найдём:

$$\operatorname{tg} \angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Искомый угол равен 30° .

Ответ: 30° .



Возможны другие формы записи ответа. Например:

А) $\frac{\pi}{6}$;

Б) $\frac{\pi}{6}$ рад.

В) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$ и т.п.

Возможны другие решения. Например, с использованием векторов или метода координат.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3

Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

Решение.

1. Неравенство $4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22$ запишем в виде $(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x - 22 \leq 0$.

Относительно $t = 2^x$ неравенство имеет вид: $t^2 - 9t - 22 \leq 0$, откуда получаем: $(t+2)(t-11) \leq 0$, $-2 \leq t \leq 11$.

Значит, $-2 \leq 2^x \leq 11$, $x \leq \log_2 11$.

2. Второе неравенство системы определено при $\begin{cases} (x+1)(x-2) > 0, \\ \frac{x+1}{x-2} > 0, \end{cases}$

то есть при $x < -1$ и $x > 2$.

При допустимых значениях переменной получаем:

$$\log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}, \log_3((x+1)(x-2)) - \log_3 \frac{x+1}{x-2} \leq 1,$$

$$\log_3(x-2)^2 \leq 1, (x-2)^2 \leq 3, 2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}.$$

С учётом области допустимых значений переменной получаем решение второго неравенства системы: $2 < x \leq 2 + \sqrt{3}$.

3. Сравним $\log_2 11$ и $2 + \sqrt{3}$. Так как $\sqrt{3} > \sqrt{2,25} = 1,5$, то

$$2 + \sqrt{3} > 3,5 = \log_2(8 \cdot \sqrt{2}) > \log_2(8 \cdot 1,4) = \log_2(11,2) > \log_2 11,$$

следовательно, $\log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$.

Решение системы неравенств: $(2; \log_2 11]$.

Ответ: $(2; \log_2 11]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Для обоих неравенств системы обоснованно получены верные ответы, но не проведено обоснованного сравнения значений конечных точек найденных промежутков	2
Для одного из двух неравенств системы обоснованно получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Комментарий. Если обоснованно получены оба ответа: $x \leq \log_2 11$ и $2 < x \leq 2 + \sqrt{3}$, после чего лишь **сказано**, но никак не обосновано, что $\log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$, то такое решение оценивается в 2 балла.

C4

На стороне BA угла ABC , равного 30° , взята такая точка D , что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A , D и касающейся прямой BC .

Решение.

Центр O искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AD . Обозначим P середину отрезка AD , Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC , E – точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой BC (см. рисунок а). Из условия касания окружности и прямой BC следует, что отрезки OA , OD и OQ равны радиусу R окружности.

Заметим, что точка O не может лежать по ту же сторону от прямой AB , что и точка E , так как в этом случае расстояние от точки O до прямой BC меньше, чем расстояние от неё до точки A .

Из прямоугольного треугольника BPE с катетом $BP = 2$ и $\angle B = 30^\circ$ находим, что $PE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Так как $OA = R$ и $AP = 1$, получаем: $OP = \sqrt{R^2 - 1}$, следовательно, $OE = \sqrt{R^2 - 1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

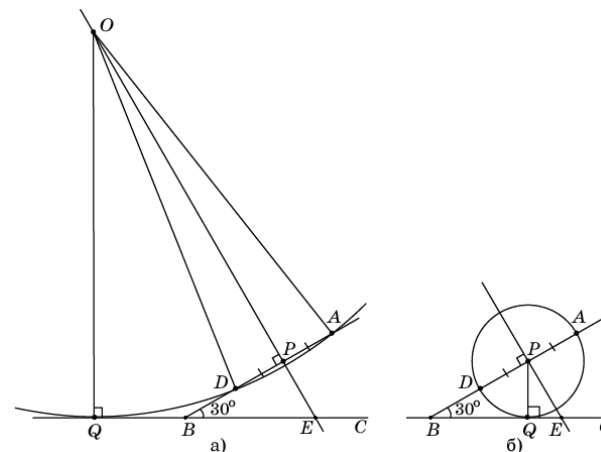
Из прямоугольного треугольника OQE , в котором $\angle E = 60^\circ$, находим:

$$R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} OE = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} + 1.$$

В результате получаем уравнение:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{R^2 - 1} = R - 1.$$

Возведём в квадрат обе части этого уравнения и приведём подобные члены. Получим уравнение $R^2 - 8R + 7 = 0$, решая которое находим два корня: $R_1 = 1$, $R_2 = 7$. Если радиус равен 1, то центром окружности является точка P (см. рисунок б).



Ответ: 1 или 7.

Другое решение.

Пусть точка Q касания окружности с прямой BC лежит на луче BC (см. рисунок а). По теореме о касательной и секущей

$$BQ^2 = BA \cdot BD = (BD + DA) \cdot BD = (1 + 2) \cdot 1 = 3,$$

откуда $BQ = \sqrt{3}$.

Пусть O – точка пересечения луча BA и перпендикуляра к BC , проведённого через точку Q . Из прямоугольного треугольника BQO находим:

$$BO = \frac{BQ}{\cos 30^\circ} = 2, \text{ тогда } AO = OD = 1 \text{ и } OQ = \frac{1}{2} BO = 1.$$

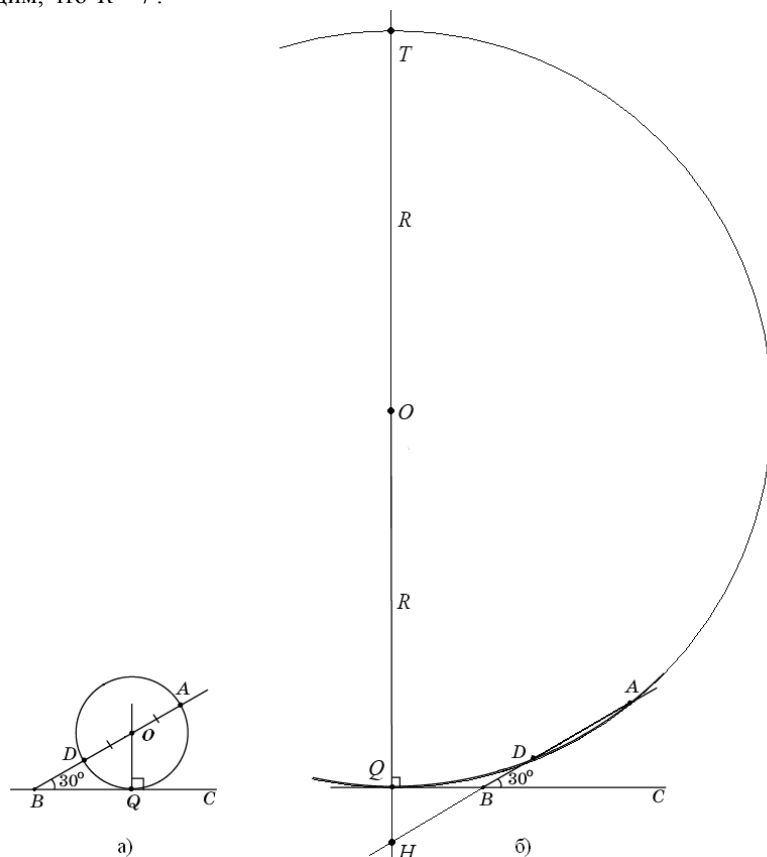
Таким образом, точка O удалена от точек A , D и Q на одно и то же расстояние, равное 1. Следовательно, O – центр искомой окружности, а её радиус равен 1.

Пусть теперь точка Q касания окружности с прямой BC лежит на продолжении BC за точку B (см. рисунок б), а прямая, проходящая через точку Q перпендикулярно BC , пересекает прямую AB в точке H , а окружность вторично – в точке T . Тогда

$$BQ = \sqrt{BA \cdot BD} = \sqrt{3}, \quad \angle HBQ = \angle ABC = 30^\circ,$$

$$BH = \frac{BQ}{\cos 30^\circ} = 2, \quad HQ = \frac{1}{2} BH = 1.$$

Если R – радиус окружности, то $QT = 2R$. По теореме о двух секущих $HQ \cdot HT = HA \cdot HD$, то есть $1 \cdot (1 + 2R) = (2 + 3) \cdot 3$, откуда находим, что $R = 7$.



Ответ: 1 или 7.

Возможны другие формы записи ответа. Например:

А) 1, 7;

Б) радиус окружности равен 7 или 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины, или рассмотрены обе конфигурации, для которых получены значения искомой величины, неправильные из-за арифметических ошибок	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2 - 8x + 7 \geq 0$: $f(x) = x^2 + 2(a - 4)x + 7$, а её график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4 - a$;

б) при $x^2 - 8x + 7 < 0$: $f(x) = -x^2 + (2a + 8)x - 7$, а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

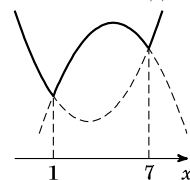


Рис. 1

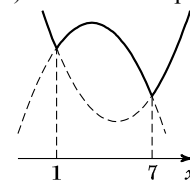


Рис. 2

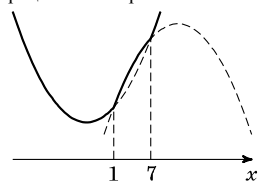


Рис. 3

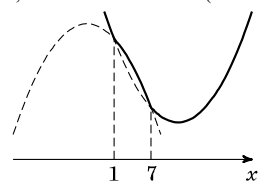


Рис. 4

2. Наименьшее значение функция $f(x)$ может принять только в точках $x = 1$ или $x = 7$, а если $4 - a \notin [1; 7]$ – то в точке $x = 4 - a$.

3. Наименьшее значение функции f больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1) > 1, \\ f(7) > 1, \\ f(4-a) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a > 1, \\ 14a > 1, \\ 2a(4-a) + |a^2 - 9| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a > \frac{1}{14}, \\ 2a^2 - 8a + 1 - |a^2 - 9| < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3, \\ a^2 - 8a + 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 3, \\ 4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3, \\ 3a^2 - 8a - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3, \\ \frac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \frac{4 + \sqrt{40}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq a < 4 + \sqrt{6} \\ \frac{1}{2} < a < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решении условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3 , среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k - 8l = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $5l \geq 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l = -3(k + l + m)$: $4k - 8l = -132$, откуда $k = 2l - 33$. Так как $k + l \leq 44$, получаем: $3l - 33 \leq 44$, $3l \leq 77$, $l \leq 25$, $k = 2l - 33 \leq 17$; то есть положительных чисел не более 17.

Пример) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и два

раза написан 0. Тогда $\frac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25}{44} = \frac{68 - 200}{44} = -3$, указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), $V_{\text{пример}}$, $V_{\text{оценка}}$	4
Верно выполнены три пункта из четырёх: а), б), $V_{\text{пример}}$, $V_{\text{оценка}}$	3
Верно выполнены два пункта из четырёх: а), б), $V_{\text{пример}}$, $V_{\text{оценка}}$	2
Верно выполнен один пункт из четырёх: а), б), $V_{\text{пример}}$, $V_{\text{оценка}}$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4