# Геометрия. Планиметрия

## Список полезных фактов

**1.** а) Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

б) Биссектрисы внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

**2.** а) Если биссектрисы, проведённые из вершин $B$ и $C$ треугольника $ABC$, пересекаются в точке $O$, то $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

б) Если биссектрисы внешних углов при вершинах $B$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $Q$, то $\angle BQC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

**3.** а) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

**4.** а) Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

б) Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

**5.** Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

**6.** Свойства окружности.

а) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.

б) Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

в) Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

г) Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

д) Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

е) Окружность симметрична относительно центра и относительно любого своего диаметра.

ж) Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

**7.** а) *Замечательное свойство окружности.* Геометрическое место точек $M$, из которых отрезок $AB$ виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром $AB$ без точек $A$ и $B$.

б) Геометрическое место точек $M$, из которых отрезок $AB$ виден под острым углом ($\angle AMB < 90°$), есть внешность круга с диаметром $AB$ без точек прямой $AB$.

в) Геометрическое место точек $M$, из которых отрезок $AB$ виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром $AB$ без точек отрезка $AB$.

г) Геометрическое место точек, из которых отрезок $AB$ виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей с общей хордой $AB$, лежащие по разные стороны от прямой $AB$, без точек $A$ и $B$.

**8.** а) Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.

б) Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания.

**9.** а) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами $a$, $b$ и гипотенузой $c$, равен $\frac{a+b-c}{2}$.

б) Если $M$ — точка касания со стороной $AC$ окружности, вписанной в треугольник $ABC$, то $AM = p - BC$, где $p$ — полупериметр треугольника.

в) Если окружность касается стороны $BC$ треугольника $ABC$ и продолжений сторон $AB$ и $AC$, то расстояние от вершины $A$ до точки касания окружности с прямой $AB$ равно полупериметру треугольника $ABC$.

г) Если окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается сторон $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно в точках $K$, $L$ и $M$, а $\angle BAC = \alpha$, то $\angle KLM = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

д) Если прямые, проходящие через точку $A$, касаются окружности $S$ в точках $B$ и $C$, то центр вписанной окружности треугольника $ABC$ лежит на окружности $S$.

е) Если расстояние между центрами окружностей радиусов $r$ и $R$ равно $a$ и $a > R + r$, то отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключённые между точками касания, равны соответственно

$$\sqrt{a^2-(R-r)^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2-(R+r)^2}.$$

**10.** Если окружности радиусов $r$ и $R$ с центрами $O_1$ и $O_2$ касаются внешним образом в точке $K$, а прямая касается этих окружностей в различных точках $A$ и $B$ и пересекается с общей касательной, проходящей через точку $K$, в точке $C$, то $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$, а отрезок $AB$ общей внешней касательной окружностей равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

**11.** а) Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними.

б) Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

в) Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

**12.** а) Если прямая, проходящая через точку $A$ и центр $O$ вписанной окружности треугольника $ABC$, вторично пересекает описанную окружность треугольника в точке $M$, то треугольники $BOM$ и $COM$ равнобедренные.

б) *Формула Эйлера.* Если $O_1$, $O_2$ — центры вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$, а $r$ и $R$ — радиусы этих окружностей то $O_1O_2 = \sqrt{R^2 - 2rR}$.

**13.** а) Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.

б) Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

**14.** а) Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

б) Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

**15.** а) Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

б) Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна её средней линии.

в) Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

**16.** а) *Замечательное свойство трапеции.* Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

б) Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивается её диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны.

в) Если через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями $a$ и $b$ проведена прямая, параллельная основаниям, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами трапеции, равен $\frac{2ab}{a+b}$.

г) Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным $a$ и $b$, на две равновеликие трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

д) Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным $a$ и $b$, на две подобные трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{ab}$.

**17.** а) Если $BM$ и $CN$ — высоты треугольника $ABC$, то треугольник $AMN$ подобен треугольнику $ABC$, причём коэффициент подобия равен $|\cos\angle A|$.

б) Если $H$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$, а $O$ — центр его описанной окружности, то отрезок $AH$ вдвое больше расстояния от точки $O$ до середины стороны $BC$.

в) Точки $O$, $H$ и точка $M$ пересечения медиан треугольника $ABC$ лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причём точка $M$ лежит на отрезке $OH$ и $OM : MH = 1 : 2$.

г) Если $BM$ и $CN$ — высоты треугольника $ABC$, а $O$ — центр описанной окружности, то $OA \perp MN$.

д) Точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника $ABC$ относительно прямых $AB$, $AC$ и $BC$, лежат на описанной окружности треугольника $ABC$.

е) Точки, симметричные точке пересечения высот треугольника $ABC$ относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности треугольника $ABC$.

ж) Если $AK$, $BM$ и $CN$ — высоты остроугольного треугольника $ABC$, то биссектрисы треугольника $KMN$ (ортотреугольника треугольника $ABC$) лежат на прямых $AK$, $BM$ и $CN$. Если же треугольник $ABC$ тупоугольный, то на этих прямых лежат биссектрисы двух внешних и третьего внутреннего углов треугольника $KMN$.

**18.** а) Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.

б) *Теорема о касательной и секущей и следствие из неё.* Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

в) Прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

г) Общие хорды (или их продолжения) трёх попарно пересекающихся окружностей проходят через одну точку либо параллельны.

**19.** *Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.* Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

**20.** а) *Следствие из теоремы косинусов.* Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

б) *Формула для медианы треугольника.* Если $m_c$ — медиана треугольника, проведённая к стороне $c$, то $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$, где $a$ и $b$ — остальные стороны треугольника.

**21.** *Формулы для биссектрисы треугольника.* Если $a$ и $b$ — стороны треугольника, $\gamma$ — угол между ними, $l$ — биссектриса треугольника, проведённая из вершины этого угла, а $a'$ и $b'$ — отрезки, на которые биссектриса делит третью сторону треугольника, то

$$l = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}, \quad l^2 = ab - a'b'.$$

**22.** *Формулы для площади треугольника.* Если $a$, $b$ и $c$ — стороны треугольника, $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — противолежащие им углы, $h_a$, $h_b$ и $h_c$ — высоты, проведённые из вершин этих углов, $p$ — полупериметр треугольника, $R$ — радиус описанной окружности, $r$, $r_a$, $r_b$ и $r_c$ — радиусы вписанной и вневписанных окружностей, касающихся сторон $a$, $b$ и $c$ соответственно, а $S$ — площадь треугольника, то

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr, \quad S = (p-a)r_a,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(формула Герона)},$$

$$S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \quad S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}, \quad S = \frac{h_bh_c}{2\sin\alpha}, \quad S = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$

**23.** а) Площадь четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

б) Площадь любого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

**24.** а) Медиана разбивает треугольник на два равновеликих.

б) Три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих.

в) Если площадь треугольника равна $S$, то площадь треугольника, составленного из его медиан, равна $\frac{3}{4}S$.

г) Если точка $M$ лежит на стороне $BC$ треугольника $ABC$ или на её продолжении, то $\frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{BM}{MC}$.

д) Если точки $P$ и $Q$ лежат на сторонах $AB$ и $AC$ или на их продолжениях, то $\frac{S_{\Delta APQ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}$.

**25.** а) Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, причём площадь параллелограмма вдвое меньше площади четырёхугольника.

б) Середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей либо являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

**26.** Диагонали четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

**27.** Если диагонали $AC$ и $BD$ четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса $R$ с центром $O$, пересекаются в точке $P$ и перпендикулярны, то

а) расстояние от точки $O$ до стороны $AB$ вдвое меньше стороны $CD$;

б) медиана $PM$ треугольника $APD$ перпендикулярна стороне $BC$;

в) $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = 8R^2$, $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2$;

г) площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$, причём для любого другого четырёхугольника $ABCD$ с теми же сторонами площадь меньше, чем $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

**28.** Две окружности касаются внутренним образом в точке $M$. Если $AB$ — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке $T$, то $MT$ — биссектриса угла $AMB$.

**29.** Если вписанная окружность касается сторон $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ в точках $M$ и $N$, а $P$ — точка пересечения прямой $MN$ с биссектрисой угла $B$, то $\angle BPC = 90°$.

**30.** *Окружность Аполлония.* Геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до двух данных точек относятся как $m : n$ $(m \neq n)$, есть окружность.

**31.** *Теорема Птолемея.* Сумма произведений противоположных сторон вписанного четырёхугольника равна произведению его диагоналей.