

ТЕМА 1.

Комбинаторика. Вычисление вероятностей

Задача 1Б. В розыгрыше кубка страны по футболу берут участие 17 команд. Сколько существует способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали?

Решение:

Поскольку медали не равноценны, то количество способов распределить золотую, серебряную и бронзовую медали среди команд будет равно числу размещений из 17-ти элементов по 3, т.е.

$$A_{17}^3 = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17!}{14!} = 15 \cdot 16 \cdot 17 = 4080.$$

Задача 2Б. Произведено три выстрела по мишени. Рассматриваются такие элементарные события: A – попадание в мишень при i -том выстреле; $\bar{A}$ – промах по мишени при i -том выстреле. Выразить через A и $\bar{A}$ следующие события:

A – все три попадания; B – ровно два попадания; C – все три промаха; D – хотя бы одно попадание; E – больше одного попадания; F – не больше одного попадания.

Решение:

A – все три попадания, т.е. совместное появления трех событий A_1, A_2 и A_3

$P(A) = P(A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3)$

B – ровно два попадания, т.е. два попадания и один промах

$P(B) = P(\bar{A}_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3 \text{ или } A_1 \text{ и } \bar{A}_2 \text{ и } A_3 \text{ или } A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \bar{A}_3)$

C – все три промаха, т.е. совместное появления трех событий $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2, \bar{A}_3$

$P(C) = P(\bar{A}_1 \text{ и } \bar{A}_2 \text{ и } \bar{A}_3)$

D – хотя бы одно попадание, т.е. или одно попадание, или два попадания или три попадания

$P(D) = P(\bar{A}_1 \text{ и } \bar{A}_2 \text{ и } A_3 \text{ или } \bar{A}_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \bar{A}_3 \text{ или } A_1 \text{ и } \bar{A}_2 \text{ и } \bar{A}_3 \text{ ИЛИ } \bar{A}_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3 \text{ или } A_1 \text{ и } \bar{A}_2 \text{ и } A_3 \text{ или } A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \bar{A}_3 \text{ ИЛИ } A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3)$

или по формуле $P(D) = 1 - P(\bar{A}_1 \text{ и } \bar{A}_2 \text{ и } \bar{A}_3)$

E – больше одного попадания, т.е. или два попадания или три попадания

$P(E) = P(\bar{A}_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3 \text{ или } A_1 \text{ и } \bar{A}_2 \text{ и } A_3 \text{ или } A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \bar{A}_3 \text{ или } A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3)$

F – не больше одного попадания, т.е. одно попадание и два промаха

$P(F) = P(\bar{A}_1 \text{ и } \bar{A}_2 \text{ и } A_3 \text{ или } \bar{A}_1 \text{ и } A_2 \text{ и } \bar{A}_3 \text{ или } A_1 \text{ и } \bar{A}_2 \text{ и } \bar{A}_3)$

Задача 3Б. Игральный кубик бросают два раза. Описать пространство элементарных событий. Описать события: A – сумма появившихся очков равна 8; B – по крайней мере один раз появится 6.

Решение:

Будем считать пространством элементарных событий множество пар чисел

(i, j) , где i (соответственно j) есть число очков, выпавших при первом (втором) подбрасывании, тогда множество элементарных событий будет таким:

$$\Omega = \{(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) \\ (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) \\ (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) \\ (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) \\ (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) \\ (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)\}$$

A – сумма появившихся очков равна 8. Этому событию благоприятствуют такие элементарные события $A = \{(2,6) (6,2) (5,3) (3,5) (4,4)\}$.

B – по крайней мере один раз появится 6. Этому событию благоприятствуют такие элементарные события $B = \{(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6) (1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6)\}$.

Задача 4. В вазе с цветами 15 гвоздик: 5 белых и 10 красных. Из вазы наугад вынимают 2 цветка. Какова вероятность того, что эти цветки: а) оба белые; б) оба красные; в) разного цвета; г) одного цвета.

Решение:

а) Пусть событие A состоит в том, что оба вынутых из вазы цветка белые.

Количество возможных способов взять 2 цветка из 15-ти равно C_{15}^2 , т.е.

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 7 \cdot 15 = 105, \text{ а количество возможных способов взять 2}$$

$$\text{белых цветка из 5-ти белых равно } C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 2 \cdot 5 = 10. \text{ Тогда по}$$

классическому определению вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{10}{105} = 0,095.$$

б) Пусть событие B состоит в том, что оба вынутых из вазы цветка красные.

Количество возможных способов взять 2 цветка из 15-ти равно C_{15}^2 , т.е.

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 7 \cdot 15 = 105, \text{ а количество возможных способов взять 2}$$

$$\text{красных цветка из 10-ти красных равно } C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 9 \cdot 5 = 45. \text{ Тогда по}$$

классическому определению вероятность события B равна

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{45}{105} = 0,43.$$

в) Пусть событие C состоит в том, что оба вынутых из вазы цветка разного цвета, т.е. один белый и один красный.

Количество возможных способов взять 2 цветка из 15-ти равно C_{15}^2 , т.е.

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 7 \cdot 15 = 105, \text{ а количество возможных способов взять 1}$$

красный цветок из 10-ти красных **И** 1 белый цветок из 5-ти белых равно $C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 10 \cdot 5 = 50$. Тогда по классическому определению вероятность

$$\text{события } C \text{ равна } P(C) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^1 \cdot C_5^1}{C_{15}^2} = \frac{50}{105} = 0,48.$$

г) Пусть событие D состоит в том, что оба вынутых из вазы цветка одного цвета, т.е. или оба белые (событие A) **или** оба красные (событие B). По теореме сложения независимых событий вероятность события D будет равна $P(D) = P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) = 0,095 + 0,43 = 0,525$

Задача 5. Из шести карточек с буквами I, C, K, Ъ, H, M наугад одну за другой вынимают и раскладывают в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что появится слово

а) «HIC»; б) «CIM»?

Решение: (для пунктов а) и б) одинаково)

Каждый вариант получившегося «слова» является размещением из 6-ти элементов по 3. Число таких вариантов равно $n = A_6^3 = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$. Из этих вариантов правильным будет только один, т.е. $m = 1$, тогда по классическому

$$\text{определению вероятности } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_6^3} = \frac{1}{120} = 0,0083.$$

Задача 6. Вероятность того, что в течении одной смены возникнет поломка станка равна 0,05. Какова вероятность того, что не возникнет ни одной поломки за три смены?

Решение:

Пусть событие A состоит в том, что в течении одной смены возникнет поломка станка. По условию задачи вероятность этого события равна $P(A) = 0,05$. Противоположное событие $\bar{A}$ состоит в том, что в течении одной смены поломка станка НЕ возникнет. Вероятность противоположного события $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,05 = 0,95$. Искомая вероятность равна $P(B) = P(\bar{A} \text{ и } \bar{A} \text{ и } \bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 = 0,95^3 = 0,86$

Задача 7. Студент пришел на зачет зная только 30 вопросов из 50. Какова вероятность сдачи зачета, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один?

Решение:

Вероятность того, что преподаватель задал студенту вопрос, на который он

не знал ответа (событие A) равна $P(A) = \frac{20}{50}$. Найдем вероятность того, что на второй вопрос преподавателя студент знает ответ (событие B) при условии, что ответа на первый вопрос студент не знал. Это условная вероятность, так как событие A уже произошло. Отсюда $P_A(B) = \frac{30}{49}$. Искомую вероятность определим по теореме умножения вероятностей зависимых событий. $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{20}{50} \cdot \frac{30}{49} = 0,24$.

Задача 8. С помощью наблюдений установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из наугад взятых в этом месяце 8-ми дней 3 будут дождливыми?

Решение:

Поскольку количество испытаний невелико ($n = 8$), то для нахождения вероятности того, что событие A появится точно $k = 3$ раза воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p$$

По условию задачи вероятность дождя равна $p = 12/30 = 6/15$, (в сентябре 30 дней).

Значит вероятность ясного дня равна $q = 1 - p = 1 - 6/15 = 9/15$.

$$P_8(3) = C_8^3 p^3 q^{8-3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} \left(\frac{6}{15}\right)^3 \left(\frac{9}{15}\right)^5 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{36 \cdot 6}{225 \cdot 15} \cdot \frac{81 \cdot 729}{225 \cdot 3375} \approx 0,28.$$

Задача 9. С помощью наблюдений установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 25 дней без дождя. Какова вероятность того, что 1-го и 2-го сентября дождя не будет?

Решение:

Вероятность того, что 1-го сентября дождя не будет (событие A) равна $P(A) = \frac{25}{30}$. Найдем вероятность того, что и 2-го сентября дождя не будет (событие B) при условии, что 1-го сентября дождя не было. Это условная вероятность, так как событие A уже произошло. Отсюда $P_A(B) = \frac{24}{29}$. Искомую вероятность определим по теореме умножения вероятностей зависимых событий. $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} = 0,7$.

Задача 10. В условиях задачи 8 найти вероятность наимвероятнейшего числа дней без дождя. (Задача 8. С помощью наблюдений установлено, что в некоторой местности в

сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из наугад взятых в этом месяце 8-ми дней 3 будут дождливыми?)

Решение:

Число m_0 называется **наивероятнейшим** в n независимых испытаниях, если вероятность наступления события A при этом числе наибольшая.

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$$

По условию задачи 8 вероятность дня без дождя равна $p = 9/15$, значит вероятность дождливого дня равна $q = 6/15$. Составим неравенство

$$30 \frac{9}{15} - \frac{6}{15} \leq m_0 \leq 30 \frac{9}{15} + \frac{9}{15}$$

$$17,6 \leq m_0 \leq 18,6 \Rightarrow m_0 = 18$$

Наивероятнейшее число дней без дождя равно 18. Поскольку количество испытаний велико ($n = 30$) и нет возможности применить формулу Бернулли, то для нахождения вероятности наивероятнейшего числа дней без дождя воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad \text{где } x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \text{ и } \varphi(x) - \text{диф. функция Лапласа -Гаусса}$$

Определим аргумент функции Лапласа-Гаусса x :

$$x = \frac{18 - 30 \cdot 0.6}{\sqrt{30 \cdot 0.6 \cdot 0.4}} = \frac{0}{\sqrt{7,2}} = 0.$$

По таблице значений функции Гаусса определяем, что $\varphi(0) = 0,3989$. Теперь

$$P_{30}(18) = \frac{0,3989}{2,7} \approx 0,15.$$

Задача 11. Вероятность получения удачного результата при проведении сложного химического опыта равна $3/4$. Найти вероятность шести удачных результатов в 10-ти опытах.

Решение:

Поскольку количество испытаний невелико ($n = 10$), то для нахождения вероятности того, что событие A появится точно $k = 6$ раз воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } q = 1 - p$$

По условию задачи $p = 3/4$, значит $q = 1 - p = 1 - 3/4 = 1/4$.

$$P_{10}(6) = C_{10}^6 p^6 q^{10-6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} \left(\frac{3}{4}\right)^6 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{81 \cdot 9}{256 \cdot 16} \cdot \frac{1}{256} = \frac{153090}{1048576} \approx 0,146$$

Задача 12. Вероятность рождения мальчика равна 0,515, девочки – 0,485. В некоторой семье шестеро детей. Найти вероятность того, что среди них не больше двух девочек.

Решение:

Пусть событие A состоит в том, что в семье, где шестеро детей, не больше двух девочек, т.е. в указанной семье или одна девочка или две девочки или все мальчики. Поскольку количество испытаний невелико ($n = 6$), то для нахождения вероятности события A воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p$$

По условию задачи вероятность рождения девочки равна $p = 0,485$ и вероятность рождения мальчика равна $q = 0,515$, тогда искомая вероятность будет равна

$$\begin{aligned} P(A) &= P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0 p^0 q^{6-0} + C_6^1 p^1 q^{6-1} + C_6^2 p^2 q^{6-2} = \\ &= \frac{6!}{0!(6-0)!} (0,485)^0 (0,515)^6 + \frac{6!}{1!(6-1)!} (0,485)^1 (0,515)^5 + \frac{6!}{2!(6-2)!} (0,485)^2 (0,515)^4 = \\ &= 0,018657 + 0,105421 + 0,248201 \approx 0,37228. \end{aligned}$$

Задача 13. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника (включая ничью) три партии из пяти или пять из восьми?

Решение:

Вероятность выиграть у равносильного противника равна $p = 0,5$, соответственно вероятность проиграть у равносильного противника равна $q = 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5$.

Найдем и сравним такие вероятности $P_5(3)$ и $P_8(5)$

Поскольку количество испытаний невелико ($n = 5$ и $n = 8$), то для нахождения вероятности того, что событие A появится точно $k = 3$ раза ($k = 8$ раз) воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} (0,5)^3 (0,5)^2 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0,5^5 = 10 \cdot 0,03125 = 0,3125;$$

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^{8-5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} (0,5)^5 (0,5)^3 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,5^8 = 0,2186.$$

Сравнивая полученные значения вероятностей $P_5(3) = 0,3125 > P_8(5) = 0,2186$ получаем, что вероятнее выиграть у равносильного противника три партии из пяти чем пять из восьми.

Задача 13. Из партии, в которой 25 изделий, среди которых 6 бракованных, случайным образом выбрали 3 изделия для проверки качества. Найти вероятность того, что: а) все изделия годные, б) среди выбранных изделий одно бракованное; в) все изделия бракованные.

Решение:

а) Пусть событие А состоит в том, что все выбранные изделия годные. Количество возможных способов взять 3 изделия из 25-ти равно C_{25}^3 , т.е.

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300, \text{ а количество возможных способов взять 3}$$

$$\text{годных изделия из } (25 - 6) = 19\text{-ти годных равно } C_{19}^3 = \frac{19!}{3! \cdot 16!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$$

1938. Тогда по классическому определению вероятность события А равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{19}^3}{C_{25}^3} = \frac{1938}{2300} = 0,84.$$

б) Пусть событие В состоит в том, что среди выбранных изделий одно бракованное, т.е. одно бракованное и два годных. Количество возможных способов взять 3 изделия из 25-ти равно $C_{25}^3 = 2300$, а количество возможных способов взять одно бракованное изделие из 6-ти бракованных **И** два годных изделия из $(25 - 6) = 19\text{-ти годных равно } C_6^1 \cdot C_{19}^2 = 6 \cdot 153 = 738$. Тогда по классическому определению вероятность события В равна

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^1 \cdot C_{19}^2}{C_{25}^3} = \frac{738}{2300} = 0,32.$$

в) Пусть событие С состоит в том, что все выбранные изделия бракованные. Количество возможных способов взять 3 изделия из 25-ти равно $C_{25}^3 = 2300$, а количество возможных способов взять 3 бракованные изделия из 6-ти бракованных равно $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$. Тогда по классическому определению вероятность события С равна

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^3}{C_{25}^3} = \frac{20}{2300} = 0,0087.$$

Задача 14. В условиях задачи 13 найти наивероятнейшее число удачных опытов и вероятность его появления. (Задача 11. Вероятность получения удачного результата при проведении сложного химического опыта равна 3/4. Найти вероятность шести удачных результатов в 10-ти опытах).

Решение:

Число m_0 называется **наивероятнейшим** в n независимых испытаниях, если вероятность наступления события А при этом числе наибольшая.

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$$

По условию задачи 11 вероятность проведения удачного опыта равна $p = 3/4$, значит вероятность неудачного опыта равна $q = 1/4$. Количество опытов равно $n = 10$. Составим неравенство

$$10\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \leq m_0 \leq 10\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

$$7,25 \leq m_0 \leq 8,25 \Rightarrow m_0 = 8$$

Наивероятнейшее число удачных опытов равно 8. Поскольку количество испытаний невелико ($n = 10$), то для нахождения вероятности того, что событие A появится точно $k = 8$ раз воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p$$

$$P_{10}(8) = C_{10}^8 p^8 q^{10-8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} \left(\frac{3}{4}\right)^8 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} \cdot \frac{6561}{65536} \cdot \frac{1}{16} = \frac{295245}{1048576} \approx 0,282.$$

Задача 15Б. В белом ящике 12 красных и 6 синих шаров. В черном – 15 красных и 10 синих шаров. Бросают игральный кубик. Если выпадет количество очков, кратное 3, то наугад берут шар из белого ящика. Если выпадет любое другое количество очков, то наугад берут шар из черного ящика. Какова вероятность появления красного шара?

Решение:

Возможны две гипотезы:

H_1 – при бросании кубика выпадет количество очков, кратное 3, т.е. или 3 или 6;

H_2 – при бросании кубика выпадет другое количество очков, т.е. или 1 или 2 или 4 или 5.

По классическому определению вероятности гипотез равны:

$$P(H_1) = 2/6 = 1/3; P(H_2) = 4/6 = 2/3.$$

Поскольку гипотезы составляют полную группу событий, то должно выполняться равенство $P(H_1) + P(H_2) = 1/3 + 2/3 = 1$

Пусть событие A состоит в появлении красного шара. Условные вероятности этого события зависят от того, какая именно гипотеза реализовалась, и составляют соответственно:

$$P(A|H_1) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}; \quad P(A|H_2) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

вероятность события A будет равна:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{10+18}{9 \cdot 5} = \frac{28}{45} = 0,62$$

Задача 16Б. Вероятность появления события A по крайней мере один раз в 5-ти независимых испытаниях равна 0,9. Какова вероятность появления события A в одном испытании, если при каждом испытании она одинаковая?

Решение:

Воспользуемся формулой для вероятности появления хотя бы одного события

$$P(A) = 1 - q^n$$

По условию задачи $P(A) = 0,9$ и $n = 5$. Составим уравнение

$$0,9 = 1 - q^5$$

$$q^5 = 1 - 0,9 = 0,1$$

$q = \sqrt[5]{0,1} = 0,63$ – вероятность Не появления события A в одном испытании,

тогда

$p = 1 - q = 1 - 0,63 = 0,37$ – вероятность появления события A в одном испытании.